الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية | الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي | دورة: جوان 2012

الشعبة: تسيير واقتصاد

اختبار في مادة: الرياضيات | المـــدة: 03 ساعات و30د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{9}$.

1) أ– برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n > \frac{2}{3}$.

ب– بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

أ – بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية، يطلب تحديد أساسها وحدها الأول .

ب – اكتب عبارة v_n بدلالة n، ثم استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\right]$.

جـ – ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

3) احسب، بدلالة n، المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

يعطي الجدول أدناه، كميات الحليب، مقدرة بالهكتولتر hL، التي تمّ تجميعها في إحدى ولايات الوطن من سنة 2006 إلى سنة 2011 :

السنة	2006	2007	2008	2009	2010	2011
رتبة السنة x_i	1	2	3	4	5	6
كمية الحليب المجمّعة y_i (بالهكتولتر hL)	25000	26000	28500	29000	31000	33498

1) مثّل سحابة النقط $M(x_i ; y_i)$ في معلم متعامد مبدؤه $O'(0;20000)$ و بوحدة $1\,cm$ لكل سنة على محور الفواصل و $1\,cm$ لكل $2000\,hL$ على محور التراتيب.

2) أ– عيّن إحداثيتي النقطة المتوسطة G لهذه السحابة.

ب– عيّن معادلة مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا. (تعطى نتائج كل حساب مدوّرة إلى 10^{-2})

3) قدّر كمية الحليب التي يمكن تجميعها في سنة 2015 باستعمال التعديل الخطي السابق.

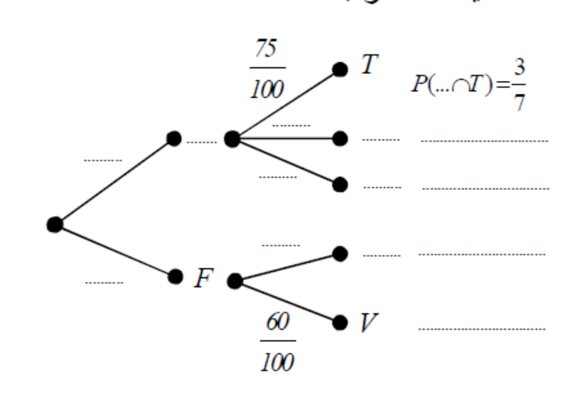
4) إذا اعتبرنا أن كمية الحليب المجمعة في السنوات الموالية لسنة 2011 تَتِمُّ بنفس الوتيرة التي تمت بها من سنة 2006 إلى سنة 2011، فابتداءً من أية سنة ستتعدى الكمية المجمعة $50000\,hL$ ؟

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(تعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال).

عدد تلاميذ قسم دراسي هو 35 تلميذا من بينهم 15 بنتا. يختار كل تلميذ من القسم رياضة واحدة وواحدة فقط يمارسها في إطار نشاطات النادي الرياضي للمؤسسة. 75% من الأولاد اختاروا ممارسة كرة القدم و 15% اختاروا ممارسة كرة اليد بينما اختار 10% ممارسة الكرة الطائرة. 60% من البنات اخترن ممارسة الكرة الطائرة والبقية اخترن ممارسة كرة اليد. لتمثيل هذا القسم في منافسة رياضية، يتم اختيار تلميذ واحد منه بطريقة عشوائية.

يرمز G إلى الحادثة " التلميذ المختار ولد " ويرمز F إلى الحادثة " التلميذ المختار بنت " .



يرمز T إلى الحادثة " التلميذ المختار يمارس كرة القدم " .

يرمز M إلى الحادثة " التلميذ المختار يمارس كرة اليد " .

يرمز V إلى الحادثة " التلميذ المختار يمارس الكرة الطائرة ".

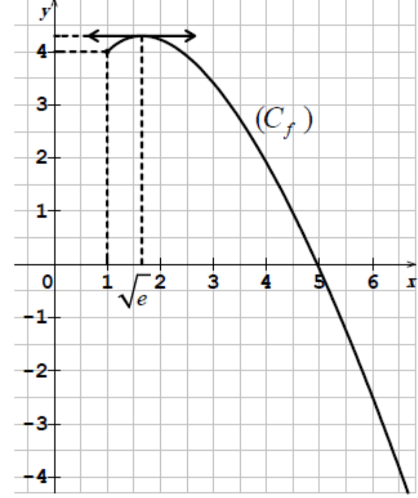
1) انقل الشجرة المقابلة على ورقة الإجابة، ثم أكملها.

2) أُحسب $P(V)$ احتمال أن تتحقق الحادثة V .

3) أُحسب الاحتمال الشرطي $P_V(G)$.

4) أُحسب احتمال أن يكون التلميذ المختار لا يمارس كرة القدم.

التمرين الرابع: (06 نقاط)



التمثيل البياني (C_f) المقابل هو للدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بالعبارة : $f(x) = ax + b + cx\ln x$ حيث c,b,a أعداد حقيقية.

1) خمّن بقراءة بيانية اتجاه تغير f ونهاية f عند $+\infty$.

2) أ- أُحسب بدلالة a و c عبارة $f'(x)$ حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f على $[1;+\infty[$.

ب- باستعمال معطيات في الشكل، وعلما أن $f(5)=16-10\ln 5$.

-بيّن أنّ: $f(x)=3x+1-2x\ln x$.

جـ- تحقق من صحة تخمينك في السؤال 1، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f.

3) بيّن أنّ المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $[1;+\infty[$، ثم تحقق أن $4,95<\alpha<4,96$.

4) نعرف العدد الحقيقي S كما يلي: $S=\int_1^{\alpha} f(x)dx$ (حيث α هو حل المعادلة $f(x)=0$).

أ- بيّن أن الدالة: $g: x \mapsto 2x^2 + x - x^2\ln x$ دالة أصلية للدالة f على $[1;+\infty[$.

ب- أعط تفسيرا هندسيا للعدد S، ثم احسبه بدلالة α .

جـ- بيّن أن: $S=\frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)-3$ ، ثم استنتج حصرا للعدد S .

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

في بداية جانفي 2008 وضع شخص مبلغا من المال قدره $50000\,DA$ في صندوق التوفير والاحتياط.

يقدم الصندوق فائدة قدرها 5% سنويا .

يسحب هذا الشخص نهاية كل سنة مبلغا قدره $5000\,DA$ (بعد حساب الفوائد).

يرمز u_n إلى المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في حسابه بداية جانفي من السنة $2008+n$.

1) أ– أُحسب كلا من u_0 ، u_1 و u_2 .

ب– هل المتتالية (u_n) هندسية ؟ هل هي حسابية ؟ برّر إجابتك.

جـ– بيّن لماذا من أجل كل عدد طبيعي n لدينا، $u_{n+1}=1,05u_n-5000$.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=u_n-100\,000$.

أ– بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية ، حدّد أساسها وحدّها الأوّل.

ب– أُكتب v_n بدلالة n، ثمّ استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=-50\,000\times(1,05)^n+100000$.

3) أ– ما هو المبلغ الذي يكون في حساب هذا الشخص نهاية عام 2015 ؟

ب– ابتداء من أية سنة لا تسمح إدارة الصندوق لهذا الشخص بسحب المبلغ المعتاد على سحبه في نهاية كل سنة؟

التمرين الثاني: (06 نقاط)

جدول التغيرات المقابل هو للدالة f المعرفة على المجال $[-1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=(x+1)e^{1-x}$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0 ↗	e	↘ 0

1) بيّن أنّ معادلة (Δ) المماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1 هي: $y=-x+3$.

2) g هي الدالة المعرفة على المجال $[-1;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=-x\,e^{1-x}+1$.

أ– أُدرس اتجاه تغيّر الدالة g .

ب– أُحسب $g(1)$، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $[-1;+\infty[$.

3) h هي الدالة المعرفة على المجال $[-1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x)=(x+1)e^{1-x}+x-3$.

أ– لاحظ أنه من أجل كل x من المجال $[-1;+\infty[$ ، $h(x)=f(x)+x-3$، ثم استنتج أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$.

ب– بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $[-1;+\infty[$، $h'(x)=g(x)$ ، ثم استنتج جدول تغيرات الدالة h.

جـ– تحقق أنّ المعادلة: $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[-1;+\infty[$ يطلب تعيينه.

د– حدّد إشارة $h(x)$، ثمّ استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

هـ– أنشئ كلا من المماس (Δ) والمنحنى (C_f).

التمرين الثالث: (04 نقاط)

بيّنت دراسة إحصائية لتلاميذ السنة الثالثة ثانوي بإحدى الثانويات أن $30\,\%$ من التلاميذ قدِموا من الإكمالية A و $45\,\%$ من الإكمالية B والبقية من الإكمالية C.

بعد اجتياز التلاميذ لامتحان البكالوريا تبيّن ما يلي : نجح في الامتحان $25\,\%$ من التلاميذ القادمين من الإكمالية A و $18\,\%$ من الذين قدموا من الإكمالية B و $84\,\%$ من الذين قدموا من الإكمالية C .

نختار تلميذا من تلاميذ السنة الثالثة ثانوي بطريقة عشوائية بعد اجتياز امتحان البكالوريا.

يرمز R إلى الحادثة "التلميذ المختار نجح في الامتحان"

يرمز A إلى الحادثة "التلميذ المختار قادم من الإكمالية A"

يرمز B إلى الحادثة "التلميذ المختار قادم من الإكمالية B"

يرمز C إلى الحادثة "التلميذ المختار قادم من الإكمالية C"

1) أنجز شجرة الاحتمالات التي تُنمْذِج هذه الوضعية .

2) أثبت أن $P(C\cap R)=0,21$.

3) احسب $P(R)$ احتمال الحادثة R.

4) احسب الاحتمال الشرطي $P_R(B)$.

التمرين الرابع: (05 نقاط)

f هي الدالة المعرفة على المجال $]-1\,;+\infty[$ بالعبارة : $f(x)=\frac{1}{3}x^3+100+\frac{57600}{x+1}$.

1) اُحسب نهايتي f عند -1 بقيم أكبر وعند $+\infty$.

2) أ- بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]-1\,;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{(x^2+x-240)(x^2+x+240)}{(x+1)^2}$.

ب- استنتج اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1\,;+\infty[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

جـ- جد الدالة الأصلية H للدالة $h:x\mapsto\frac{1}{x+1}$ على المجال $]-1\,;+\infty[$ والتي تنعدم من أجل $x=0$.

3) تنتج إحدى شركات تركيب آلات الغسيل خلال أسبوع 5 آلات على الأقل و200 آلة على الأكثر.

تُنَمْذَجُ الكلفة الهامشية C_m لإنتاج x آلة إضافية للشركة على المجال $[5\,;200]$ بالدالة f أي أنّ:

من أجل كل x من المجال $[5\,;200]$ ، $C_m(x)=f(x)$.

أ- ما هو عدد الآلات التي يجب أن تنتجها الشركة خلال أسبوع لكي تكون الكلفة الهامشية أقل ما يمكن؟

ب- نرمز بالرمز $C(x)$ للكلفة الإجمالية لإنتاج x آلة. ونذكّر أنّ $C'(x)=C_m(x)$.

جد عبارة الكلفة الإجمالية $C(x)$، علما أن الكلفة الإجمالية لإنتاج 5 آلات الأولى هي $40000\ DA$ ، ثم استنتج قيمة الكلفة الإجمالية لإنتاج 15 آلة الأولى.

عناصر الإجابة (الموضوع الأول)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الأول		
1) أ- إثبات أن $u_n > \frac{2}{3}$	01	05
ب- اثبات أن (u_n) متناقصة	01	
2) أ- (u_n) متتالية هندسية. $v_0 = \frac{1}{3}$ ، $q = \frac{1}{3}$	0,75	
ب- $v_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ، $u_n = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\right]$	0,5+0,25	
جـ- $\lim u_n = \frac{2}{3}$	0,5	
3) $v_0 + v_1 + \ldots + v_n = \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$	0,25	
$S_n = \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] + \frac{2}{3}(n+1)$	0,75	
التمرين الثاني		05
1) تمثيل سحابة النقاط	01	
2) أ- G(3,5 ; 28833)	0,5	
ب- b=23034 , a=1656,86	0,5+1	
3) - رتبة السنة 2015 هي 10	0,5	
- الكمية المقدرة هي حوالي : 39602,6 hL	0,5	
4) y>5000 و منه x>16,27 أي x=17	0,75	
السنة التي رتبتها 17 هي 2022	0,25	
التمرين الثالث		04
1) شجرة الاحتمالات: G (20/35) ← T (75/100) : $P(G\cap T)=3/7$ ؛ M (15/100) : $P(G\cap M)=3/35$ ؛ V (10/100) : $P(G\cap V)=2/35$ — F (15/35) ← V (40/100) : $P(F\cap M)=6/35$ ؛ M (60/100) : $P(F\cap V)=9/35$	5x0,5	

	0,5	2) $P(V)=11/35$
	0,5	3) $P_V(G)=2/11$
	0,5	4) $P(\bar{T})=1-P(T)=4/7$
06	 2×0,25 0,25	**التمرين الرابع** 1) f متزايدة تماما على $\left[1;\sqrt{e}\right]$ و متناقصة تماما على $\left[\sqrt{e};+\infty\right[$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$
	0,25 2×0,25 0,5 4×0,25 0,25 0,25 0,25 0,25	2) أ- $f'(x)=a+c(\ln x+1)$ ب- $f'(\sqrt{e})=0$ و $f(1)=4$ $\begin{cases} a+\frac{3}{2}c=0 \\ a+b=4 \\ 5a+b+5c\ln c=16-10\ln 5 \end{cases}$ $c=-2\ ,\ b=1\ ,\ a=3$ + الطريقة ج- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[3+\frac{1}{x}-\ln x\right]=-\infty$ $f'(x)=1-2\ln x$ x: 1 ، $\sqrt{e}$ ، $+\infty$ — $f'(x)$: $+$ ، 0 ، $-$ جدول تغيرات الدالة f.
	0,25 0,25 0,25	3) - المعادلة $f(x)=0$ لا تقبل حلولا على $\left[1;\sqrt{e}\right[$ - المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا على $\left]\sqrt{e};+\infty\right[$ - $f(4,95)\times f(4,96)<0$
	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25	4) أ- $g'(x)=f(x)$ ب- S هي مساحة الحيز المستوي المحدد بِـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $y=0$ ، $x=1$ و $x=\alpha$. $S=2\alpha^2+\alpha-3-\alpha^2\ln\alpha$ جـ- إثبات أن $S=\frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)-3$ $11,72<S<11,78$

130

عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الأول		
1) أ- حساب u_2, u_1, u_0	0,75	05
ب- (u_n) ليست هندسية لأن $u_1^2 \neq u_0 \times u_2$	0,25	
(u_n) ليست حسابية لأن $u_0 + u_2 \neq 2u_1$	0,25	
جـ- $u_{n+1} = u_n + u_n \times \frac{5}{100} - 5000$	0,5	
2) أ- $q = 1,05$; $v_0 = -5 \times 10^4$; $v_{n+1} = 1,05\, v_n$	2x0,25 +0,5	
ب- $u_n = -5 \times 10^4 (1,05)^n + 10^5$; $v_n = -5 \cdot 10^4 \times (1,05)^n$	2x0,5	
3) أ- المبلغ في نهاية 2015 هو $u_8 = 26127,23\ DA$	0,5	
ب- $u_n < 5000$	0,25	
$n > \frac{ln(1,9)}{ln(1,05)}$ ، $n > 13,16$ أي $n = 14$	0,25	
ابتداء من سنة 2022 لا يسمح لهذا الشخص بسحب المبلغ المعتاد	0,25	
التمرين الثاني		
1) $f'(x) = -xe^{1-x}$ ، $f'(1) = -1$ ، $f(1) = 2$	3x0,25	06
$(D) : y = -x + 3$	0,25	
2) أ- $g'(x) = (x - 1)e^{1-x}$	0,25	
(جدول التغيرات أدناه)	2x0,25	
ب- $g(1) = 0$ ، من أجل كل x من $[-1;+\infty[$ ، $g(x) \geq 0$	0,25	

x	−1		1		+∞
g'(x)		−	0	+	
g(x)	↘			↗	

131

132

3) أ- لدينا $h(x) = f(x) + x - 3$ — 0,25

$\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ — 0,25

ب- $h'(x) = g(x)$ — 0,25

x	-1		$+\infty$
h(x)	-4	↗	$-\infty$

0,5

جـ- تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة + الرتابة. — 2x0,25

$h(x) = 0$ يعني $x = 1$ و (Δ) مماس لـ (C_f)

في النقطة ذات الفاصلة 1 $[h(x) = f(x) - (-x+3)]$ — 2x0,25

د- بما أن $h(1) = 0$ فإن

x	-1		1		$+\infty$
h(x)		-	0	+	

0,5

يقع (C_f) أعلى (Δ) في $]1;+\infty[$ و يقع أسفله في المجال $[-1,1]$. — 0,25

هـ- رسم (C_f) و (Δ) — 1

التمرين الثالث — 04

1) شجرة الاحتمالات — 6x0,25

- A : 30/100
  - R : 25/100
  - $\bar{R}$
- B : 45/100
  - R : 18/100
  - $\bar{R}$
- C : 25/100
  - R : 84/100
  - $\bar{R}$

2) $P(C \cap R) = \frac{25}{100} \times \frac{84}{100}$ — 0,5

3) $P(R) = \frac{30}{100} \times \frac{25}{100} + \frac{45}{100} \times \frac{18}{100} + \frac{25}{100} \times \frac{84}{100} = 0,366$ — 4x0,25

4) $P_R(B) = \frac{P(R \cap B)}{P(R)}$ ، $P_R(B) = \frac{45}{100} \times \frac{18}{100} = 0,081$ ، — 0,25x2

$P_R(B) = 0,22$ — 0,5

	2x025	**التمرين الرابع** 1) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
05	0,5 0,25 0,25 0,5 0,5 3x0,25	2) أ- $f'(x) = x^2 - \frac{57600}{(x+1)^2}$ $f'(x) = \frac{(x^2+x-240)(x^2+x+240)}{(x+1)^2}$ ب- $(x+1)^2 > 0$ و $x^2+x+240 > 0$ من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ جدول إشارة $x^2+x-240$: x: -1 ، 15 ، $+\infty$ ؛ الإشارة: $\|$ - 0 + جدول تغيرات $f(x)$: x: -1 ، 15 ، $+\infty$ ؛ $f(x)$: $\|$ $+\infty$ ↘ 4825 ↗ $+\infty$ جـ- $H(x) = \ln(x+1) + c$ و $H(0) = 0$ ، $C = 0$
	0,5 2x0,25 0,5 0,25	3) أ- عدد الآلات هو 15 ب- C الدالة الأصلية للدالة $C_m = f$ حيث $C(5) = 4 \cdot 10^4$ $C(x) = \frac{1}{12}x^4 + 100x + 57600\ln\left(\frac{x+1}{6}\right) + \frac{473375}{12}$ $C(15) = 101662,43\ DA$

133